

# DIE ENTDECKUNG DES MATHEMATISCHEN BEWEISES - MYTHOS UND LOGOS

Posted on 16. November 2021 by peterreins

Rationales Begründen liegt dann vor, wenn auf die Frage „Warum?“ eine Antwort gegeben wird, die man als vernünftig, sinnvoll, einleuchtend, verständlich bezeichnen kann. Andernfalls ist sie sinnlos, unsinnig, nicht rational, unvernünftig.

Was jeweils als sinnvolle, „vernünftige“ Antwort anerkannt wird, hängt stark von dem jeweiligen Weltbild der Kommunizierenden ab. Ist man beispielsweise religiös, kann eine Warum-Frage immer auch beantwortet werden durch: „Weil Gott das so wollte.“ Hat der andere ein ähnliches Weltbild, so wird er seine Antwort für „vernünftig“ halten, andernfalls möglicherweise nicht.

Auch in der Mathematik wird begründet. Hier spricht man von mathematischen Beweisen. Historisch ist bemerkenswert, dass allem Anschein nach erst die alten Griechen etwa um 600 v.Chr. (vielleicht auch etwas später) damit begannen, mathematische Sachverhalte zu beweisen. Manchmal wird der Startschuss Thales von Milet zugeschrieben, der von 624 bis 544 v.Chr. gelebt hat. Spätestens aber Pythagoras (570-510 v.Chr.) und seine Pythagoreer ersannen sich Beweise für mathematischen Erkenntnisse. In jedem Fall war die mathematische Beweisführung mit der Entdeckung der Inkommensurabilität um 450 v.Chr. bereits hoch entwickelt. Zwar konnten tausend Jahre vorher die alten Ägypter und Babylonier komplizierte mathematische Aufgaben lösen. Mit den Griechen aber setzte etwas Neues ein. Der Mathematikhistoriker Szabo schreibt:

„Der große Unterschied zwischen griechischer und altorientalischer Wissenschaft besteht eben darin, dass die griechische Mathematik ein mit deduktiver Methode kunstvoll zusammengestelltes System von Kenntnissen darstellt, während die altorientalischen Texte mathematischen Inhalts nur interessante Anweisungen, sozusagen *Rezepte* und oft *Beispiele* dafür enthalten, wie man eine mathematische Aufgabe zu lösen hat... Der hervorstechendste Zug der griechischen Mathematik, der zunächst jeden unvoreingenommenen Leser überraschen muss, ist eben jene Tatsache, dass in dieser die Behauptungen ... immer *bewiesen werden*. Der *Beweis* hat in der griechischen Mathematik dieselbe unerlässliche Rolle wie in der heutigen Wissenschaft. Ja, die Beweise bei Euklid sind auch ebenso vollkommen, wie sie nur in der Mathematik sein können.“

Ähnlich schreibt R. Wilder:

„Die Babylonier haben die Mathematik entwickelt bis zu einer Stufe, in der zwei grundlegende Ideen bereit waren entdeckt und entwickelt zu werden: das Konzept des Lehrsatzes und das Konzept des Beweises.“

Und auch bei dem Wissenschaftshistoriker Wußing kann man lesen:

„Die im alten Ägypten, in Mesopotamien und im alten Indien gewonnenen mathematischen Kenntnisse erwecken unsere Bewunderung Und doch: Im Vergleich dazu hat die griechische

Mathematik einen grundsätzlich, einen prinzipiell neuen Stand erreicht. Eine historische Wende wurde vollzogen.

Im 7. Und 8. Jahrhundert v.Chr bildete sich zunächst in den ionisch-griechischen Stadtstaaten Kleinasiens eine geistige Atmosphäre heraus, die der Entstehung wissenschaftlichen Denkens günstig war. Und so vollbrachten die Griechen die große Leistung, aus einer nahezu empirisch entstandenen und oft nach Art der Rezepte betriebenen Mathematik eine systematische, logisch-deduktiv dargelegte, eigenständige Wissenschaft Mathematik zu haben. Das von ihnen geschaffene System der Geometrie wurde zwei Jahrtausende das große Vorbild für den deduktiven Aufbau einer wissenschaftlichen Disziplin schlechthin .“

Offenbar genügte es den alten Griechen um 600 v.Chr. herum nicht mehr, „mathematische Rezepte“ einfach nur anzuwenden. Vielmehr begannen sie damit, sich die Frage zu stellen, *warum* bestimmte mathematische Sachverhalte anwendbar und richtig sind, und versuchten Begründungen dafür zu finden. Es spricht viel dafür, dass die ersten geometrischen Begründungsversuche noch nicht dem Maßstab eines Euklids entsprochen haben. Aber immerhin machten die alten Griechen einen Anfang. Man kann nur darüber spekulieren, wieso sie dies taten. In jedem Fall entdeckten sie dabei etwas Einzigartiges: den mathematischen Beweis.

Wie gesagt kann man vieles begründen. Aber der mathematische Beweis unterscheidet sich in zwei Punkten fundamental von den allermeisten Begründungen:

1. Er liefert nämlich erstens *unumstößliche Gewissheit*. Wenn man einen Beweis beispielsweise davon hat, dass in einen Halbkreis eingezeichnete Dreiecke immer einen rechten Winkel haben (Satz von Thales), dann kann man sich hundertprozentig sicher sein, dass das so ist. Es gibt nicht den Hauch eines Zweifels.

Die einzige Ausnahme besteht darin, wenn man tatsächlich *auch* das Gegenteil beweisen kann. Dann hat man ein Paradoxon oder eine Antinomie. In diesem Fall hat man zwar Beweise, aber offensichtlich keine unumstößliche Wahrheit. Intellektuell sind Paradoxa hoch interessant und faszinierend.

2. Mit einem mathematischen Beweis kann man etwas begründen *alleine durch Nachdenken*, empirische Erfahrungsdaten spielen keine Rolle.

Deswegen handelt es sich durchaus um eine veritable wissenschaftliche Revolution, als die alten Griechen damit begannen, mathematische Sachverhalte beweisen zu wollen. Sie entdeckten einen Bereich, in dem sie a) *durch bloßes Nachdenken*, ohne empirische Erfahrungsdaten, zu b) *unumstößlich gewissen* Erkenntnissen gelangen konnten.

Ich will das noch einmal betonen: Für die alten Griechen, die sich das erste Mal mit mathematischen Beweisen beschäftigten, muss das eine ganz außerordentliche und unerhörte Erfahrung gewesen sein, dass man alleine durch rationale Überlegungen zu unerschütterlich sicheren Erkenntnissen gelangen kann. Ich denke wirklich, dass man dies geistesgeschichtlich nicht hoch genug einschätzen kann. Zumal die Hinwendung zur Mathematik klar die Neigung fürs Theoretische fördert. Vielleicht war die Entdeckung des mathematischen Beweises durch die alten Griechen überhaupt der Startschuss für wissenschaftliches Denken?

Es gibt viele Bücher und zahlreiche Untersuchungen darüber, wie und warum bei den alten Griechen ein Grundstein für das wissenschaftliche Denken überhaupt gelegt worden ist. An dieser Stelle sei beispielhaft Bruno Snell zitiert:

„Unser europäisches Denken hebt an bei den Griechen, seitdem gilt es als die einzige Form des Denkens überhaupt. Zweifellos ist diese griechische Form des Denkens für uns Europäer verbindlich, und wenn wir damit Philosophie und Wissenschaft treiben, so löst es sich von allen geschichtlichen Bedingtheiten und zielt auf das Unbedingte und Beständige, auf die Wahrheit, ja, es zielt nicht nur darauf, sondern erreicht es auch, Beständiges, Unbedingtes und Wahres zu begreifen.“

Man kann sich daran stören, wie hier ein angeblich überlegenes „europäisches“ Denken implizit anderen (z.B. „orientalischen“) Denkweisen gegenübergestellt wird. Diese Stoßrichtung haben übrigens häufig Begründungsversuche, warum gerade bei den Griechen so etwas wie Wissenschaft begann. Aber in einem Punkt treffen diese Versuche ins Schwarze: Bei den Griechen hat definitiv etwas Neues begonnen. Das ist förmlich mit Händen zu greifen. Die Frage ist nur, was genau dieses Neue war.

Häufig wird behauptet, dass griechische Philosophen wie Thales einen Schritt vom Mythos zum Logos vollzogen, indem sie die Welt nicht mehr mit Verweis auf Götter, Helden und phantasievolle Geschichten zu erklären versuchten, sondern mittels angeblich rationaler Gründe. Manchmal wird auch behauptet, dass diese Philosophen durch empirische Beobachtungen der Natur zu ihren Erkenntnissen gelangt seien. Nun sehen wir uns z.B. die Theorie von Thales einmal an. Soweit wir von seiner Naturphilosophie wissen, meinte er, dass im Grunde alles Wasser sei. Erstens ist es für mich nicht erkennbar, wie man zu solch einer Theorie durch Beobachtung der Natur gekommen sein kann, denn sie widerspricht ja ganz offenbar der Empirie.

Zweitens ist nicht klar, inwiefern Thales' Wassertheorie eine rationale Erklärung der Welt sein soll. So verweist Manuel Knoll darauf, dass sich die dichterisch-mythischen Erklärungen, die etwa hundert Jahre vor Thales der Dichter Hesiod gab, nicht wesentlich von denen des Thales unterscheiden. Zumal selbst bei den antiken Philosophen immer wieder Mythisches auftaucht. Zum Beispiel entwickelte Empedokles seine Lehre von den vier Elementen und identifizierte das Feuer mit Zeus, die Luft mit Hera, die Erde mit Aidoneus und das Wasser mit der Göttin Nestis.

Insofern ist für mich nicht erkennbar, inwiefern mit der altgriechischen Philosophie, sagen wir von Thales bis Empedokles, der Logos den früheren Mythos überwunden hätte. Stattdessen folge ich in wesentlichen Punkten Helmut Heit, wenn er schreibt:

„Vor etwa zweieinhalbtausend Jahren hat sich im nordöstlichen Mittelmeerraum etwas Erstaunliches ereignet. Angesichts einer umfassenden kulturellen Transformation sahen sich die Griechen genötigt, ihre Art der symbolischen Darstellung und Auffassung der Welt zu reorganisieren. Der Anlass dafür sind grundlegende sozioökonomische Veränderungen. Wie meine Interpretation der Schriften Platons ergab, haben manche Denker in Griechenland die in Mathematik und Astronomie erfolgreichen und relativ neuen Erkenntnismethoden aufgegriffen in der Hoffnung, damit einer politischen und sittlichen Krise zu begegnen. Dadurch haben sie sich von manchen Inhalten und Formen tradierten mythischen Denkens entfernt, ohne dass es einen

vollständigen Übergang vom Mythos zum Logos gegeben hätte.“

Ja, es ist etwas Neues, Erstaunliches um 600 v.Chr. herum passiert. Es war aber weniger der Umstand, dass Philosophen damit begannen, sich die Welt zu erklären. Der entscheidende Impuls kam vielmehr, wie ich meine, von der Mathematik. Heit verweist noch auf die damalige Astronomie. Aber ich sehe nicht, was bei der griechischen Astronomie fundamental anders gewesen sein soll im Vergleich zur ägyptischen oder babylonischen Astronomie. Fundamental anders war hingegen die griechische Mathematik mit der Entdeckung des mathematischen Beweises.

Übrigens hat Szabo die Vermutung formuliert, dass es eine Beziehung zwischen der altgriechischen Mathematik und Parmenides gab. Er begründete seine These damit, dass sich bei beiden eine „antiempirische Tendenz“ nachweisen lässt. Im Gegensatz zu mir, sah Szabo darin ein Indiz dafür, dass die spezifisch griechische Mathematik ein Seitenzweig der eleatischen Philosophie war. Ich vermute, wie gesagt, eher umgekehrt, dass die eleatische Philosophie stark von der damaligen Mathematik beeinflusst war.

Gegen die Auffassung Szabos spricht schon alleine die Zeitschiene. Parmenides ersann seine Philosophie um 500 herum. Aller Wahrscheinlichkeit gab es zu diesem Zeitpunkt bereits die griechische Mathematik und hatte mit Sicherheit schon ein gewisses Niveau erreicht. Jedenfalls gelang es Hipposos von Megapont um das Jahr 450 der Beweis, dass bei einem Quadrat die Seitenlänge und die Diagonale inkommensurabel sind. Es handelt sich um einen durchaus anspruchsvollen Beweis. Hätte Parmenides wirklich die Initialzündung für die antike Mathematik gegeben, wie Szabo mein, dann hätte sich diese Wissenschaft von ihren ersten Anfängen bis zu Hipposos' sehr hohem Niveau nur innerhalb von 50 Jahren oder weniger entwickeln müssen. Mir jedenfalls erscheint das höchst unwahrscheinlich.

Auch Zhmud argumentiert eher in meine Richtung, wenn er schreibt:

„Auf den ersten Blick scheint die Philosophie in einer günstigeren Lage als die Mathematik. Die Fragmente des Parmenides und Zenon gelten als erste Beispiele deduktiver Beweise... Parmenides war wohl der erste Philosoph, der seine Ideen auf logische Beweise stützt, aber er dürfte die deduktive Methode kaum selbst erfunden haben. Zu vieles spricht dafür, dass er die Methode aus der Mathematik entlehnt hat, in der sich schon seit der Zeit des Thales angewendet wurde....“

Nach der überzeugenden Rekonstruktion von der Waerdens geht den *Elementen* des Hippokrates ein pythagoreisches Lehrbuch der Mathematik voran, das den ersten vier Büchern Euklids als Grundlage dient. Wir erhalten so einen direkten Zugriff auf die pythagoreische Mathematik des beginnenden fünften Jahrhunderts, aus der Parmenides und Zenon die Idee des deduktiven Beweises geschöpft haben könnten, denn der Überlieferung nach war der Pythagoreer Ameinias Lehrer des Parmenides gewesen. Wir können uns also der schon von Gomperz formulierten Erkenntnis, dass das ‚System des Parmenides seine Form der Mathematik des Pythagoras verdankt‘ voll und ganz anschließen.“

Auch wenn es bei Parmenides selbst keinen direkten Verweis auf die Mathematik gibt, spricht somit einiges dafür, dass nicht er die Mathematik, sondern umgekehrt die antike Mathematik ihn beeinflusst hat. Schließlich findet man einen klaren Verweis auf die Mathematik bei seinem Schüler Zenon. Denn er verwendet eine mathematische Argumentationsweise, um die Thesen von

Parmenides zu untermauern.

Siehe Szabo , S. 244 f. Siehe auch Zhmud , S. 142, sowie 151 ff., Gericke , S. 78/79.

Wilder , S. 156.

Siehe Dührsen: *Thales*, in , S. 242 ff.

Siehe Snell , S. 7. Eine gute Zusammenfassung, wie sich Philosophiehistoriker seit dem ausgehenden 18. Jahrhundert mit der Bedeutung der griechischen Philosophie auseinandergesetzt haben, gibt Helmut Heit in , S. 28 ff.

Siehe Rapp , S. 18 f. oder Knoll , S. 29 ff.

Siehe Heit , S. 256.

Siehe Szabo , S. 289 ff.

Zhmud , S. 152/153.

## Comments

**peterreins** - 2022-08-03 18:43:46

Letztlich können wir heute nur Vermutungen anstellen, wie die Griechen dazu kamen, den geometrischen Beweis zu finden. Mir erscheint es so gut wie sicher, dass sie es tatsächlich getan haben (und nicht etwa importierten). Und mir erscheint es sehr wahrscheinlich (ohne es letztgültig belegen zu können), dass zuerst in der Mathematik bewiesen wurde, und erst anschließend in der Philosophie. Es gibt immer wieder Darstellungen, die es anders herum behaupten. Das kommt mir aber unschlüssig vor. Schon aus rein zeitlichen Gründen. Der erste Philosoph, der wirklich im eigentlichen Sinne beweisen wollte, war Parmenides. Der lebte aber mit Sicherheit mindestens 50 Jahre (eher mehr), nachdem die Griechen erstmals mathematische Beweise ersannen. Ein Indiz ist auch, dass belegbar zur Zeit des Parmenides die Mathematik schon ein beachtliches Niveau erreicht hat, offenbar also aus einer tastenden Anfangsphase bereits herausgekommen ist. Ferner vermute ich stark, dass die Entdeckung des mathematischen Beweises für die Griechen damals eine Art wissenschaftliche Revolution war, vielleicht vergleichbar mit der naturwissenschaftlichen Revolution mit Galilei und Newton in der Neuzeit. Das freilich ist wirklich nur eine Vermutung, die mir nur deswegen wahrscheinlich erscheint, weil bei der gesamten griechischen Philosophie ab Parmenides das rational-logische Beweisen immens im Vordergrund steht. Und zwar auf eine Weise, die uns heutigen eigentlich befremdlich ist. Ein echter Kulturunterschied. Außerdem finden sich sowohl bei Platon als auch bei Aristoteles Textstellen, die eindeutig der Mathematik eine Art Vorbildfunktion für die Philosophie zuschreiben. Was aber gesellschaftlich, historisch oder psychologisch um 600 v.Chr. bei den Griechen zur Entdeckung des mathematischen Beweises geführt hat, darüber kann ich am allerwenigsten sagen und das ist mir am dunkelsten. In jedem Fall wäre ich sehr vorsichtig, hier irgendwelche Theorien oder Erklärungen aufzustellen. Ich habe ja gerade etwas über die antike Skepsis veröffentlicht. Und manchmal ist es weise, sich einfach des Urteils oder der Erklärungsversuche zu enthalten.

**Helmut Kessmann** - 2022-08-01 14:59:21

Ich kann mir gut vorstellen, dass die "Entdeckung" des mathematische Beweises im 6./7. Jhdt eine Euphorie ausgelöst hat, die die Erfahrung als sekundär erscheinen ließ. Aber was hat diesen Umbruch ausgelöst? Warum gerade in den peripheren Bereichen Griechenlands wie z.B. Milet? Welche Bedeutung hat dabei die griechische Sprache und Schrift? Sozioökonomische Krisen - wie erwähnt - gab es ja auch anderswo. Ich habe dazu noch keine gute Erklärung gefunden.

**Thinking** - 2021-11-29 15:09:30

Dass sich die griechischen Philosophie erst entwickelte nachdem die griechischen Mathematiker revolutionär Beweise für alle Berechnungen forderten, ist für mich vollkommen neu. Auch der Unterschied der griechischen zur altorientalischen Wissenschaft ist mir jetzt klar.